Chapitre 6

Circuits RLC

Ce chapitre présente la réponse naturelle et la réponse échelon de circuits qui contiennent des inductances et des capacitances. Cependant, on étudie seulement des circuits dans des configurations particulières : circuit RLC parallèle, et circuit RLC série.

Lors de la solution des circuits RLC, on obtient des équations différentielles de 2e ordre. On présentera les solutions générales à ces équations, afin de résoudre le circuit.

6.1 Réponse naturelle d'un circuit RLC parallèle

Le circuit RLC parallèle est donné à la figure 6.1.

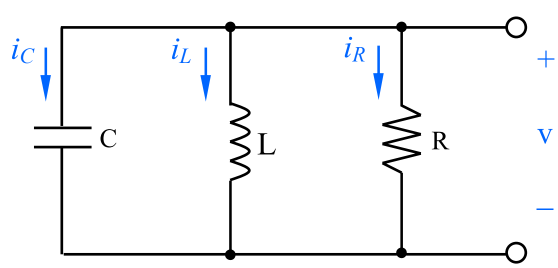


Figure 6.1 – Circuit RLC parallèle

On cherche la tension v en premier, puisque c'est la même chose pour chaque composante. On fait la somme des courants au noeud supérieur.

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau + I_0 + C\frac{dv}{dt} = 0 \tag{6.1}$$

On dérive cette équation par rapport à t, pour éliminer l'intégrale :

$$\frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} + C\frac{d^2v}{dt^2} = 0 \tag{6.2}$$

On réarrange l'équation pour mettre les dérivées en ordre décroissant :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \tag{6.3}$$

C'est une équation différentielle du 2^e ordre.

La solution à cette équation dépend des racines de *l'équation caractéristique*. Pour obtenir cette équation, on remplace :

$$s^n = \frac{d^n}{dt^n} \tag{6.4}$$

L'équation caractéristique est donc :

$$s^2 + \frac{s}{RL} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{6.5}$$

Les racines de cette équation sont :

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{6.6}$$

ou,

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{6.7}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{2RC}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{6.8}$$

Selon la valeur des racines, la solution est différente.

CAS 1 : $\omega_0^2 < \alpha^2$: réponse sur-amortie

Dans ce cas-ci, la solution est :

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{6.9}$$

et on obtient A_1 et A_2 selon :

$$v(0^+) = A_1 + A_2 \tag{6.10}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = s_1 A_1 + s_2 A_2 \tag{6.11}$$

CAS 2 : $\omega_0^2 > \alpha^2$: réponse sous-amortie

Dans ce cas-ci, la solution est :

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + B_2 e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t) \tag{6.12}$$

où

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tag{6.13}$$

On obtient B_1 et B_2 selon :

$$v(0^+) = V_0 = B_1 \tag{6.14}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2 \tag{6.15}$$

CAS 3 : $\omega_0^2 = \alpha^2$: réponse amortissement critique

Dans ce cas-ci, la solution est :

$$v(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t} \tag{6.16}$$

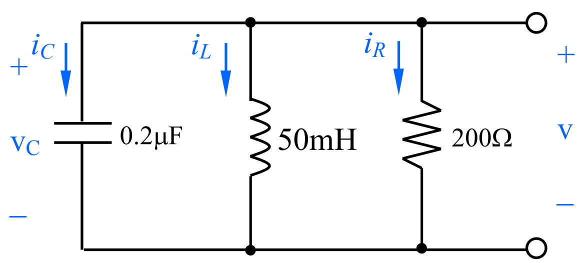
On obtient D_1 et D_2 selon :

$$v(0^+) = V_0 = D_2 \tag{6.17}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2 \tag{6.18}$$

EXEMPLE 1

Pour le circuit de la figure suivante, où l'on a les conditions initiales $v_C(0^+) = 12\text{V}$ et $i_L(0^+) = 30\text{mA}$,



1. Calculer le courant initial dans chaque branche.

2. Calculer la valeur initiale de $\frac{dv}{dt}$.
3. Donner l'expression de $v(t)$.
4. Donner l'expression de $i_C(t)$, $i_L(t)$ et $i_R(t)$.

---

1. L'inductance s'oppose à une variation instantanée de courant, donc :

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = 30 \text{ mA}$$

Le condensateur ne permet pas une variation instantanée de tension, alors

$$v_C(0^+) = v_L(0^+) = v_R(0^+) = 12 \text{ V}$$

Le courant initial dans la résistance est alors :

$$i_R(0^+) = \frac{V_R(0^+)}{R} = \frac{12}{200} = 60 \text{ mA}$$

En appliquant la loi de Kirchhoff des courants au noeud supérieur, on peut calculer le courant dans la capacitance :

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+) = -90 \text{ mA}$$

2. Puisque $i_C = C\frac{dv}{dt}$,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{i_C}{C} = \frac{-0.09}{0.2 \times 10^{-6}} = -450 \text{ kV/s}$$

3. On doit calculer les racines de l'équation caractéristique :

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(200)(0.2 \times 10^{-6})} = 12500 \text{ rad/s}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.2 \times 10^{-6})(0.05)}} = 10000 \text{ rad/s}$$

On est donc dans la situation où $\alpha^2 > \omega_0^2$. Les deux racines sont :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -5000 \text{ rad/s} \tag{6.19}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -20000 \text{ rad/s} \tag{6.20}$$

qui sont deux racines réelles distinctes.

Il faut trouver les constantes A_1 et A_2.

$$v(0^+) = A_1 + A_2 = 12$$
$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -5000A_1 - 20000A_2 = -450000$$

On solutionne pour obtenir $A_1 = -14$ et $A_2 = 26$. La tension est :

$$v(t) = -14e^{-5000t} + 26e^{-20000t} \text{ V}, \qquad t \geq 0$$

On peut vérifier la solution. Il faut que $v(t = 0) = v(0^+)$.

$$v(0) = -14 + 26 = 12 \checkmark$$

Et si on dérive,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -14(-5000) + 26(-20000) = -450000 \checkmark$$

4. On peut calculer les courants à l'aide de l'équation de tension $v(t)$. Le courant dans la résistance est :

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = -0.07e^{-5000t} + 0.13e^{-20000t} \text{ A}, t \geq 0$$

Le courant dans la capacitance est :

$$\begin{aligned} i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt} &= (0.2 \times 10^{-6})(70000e^{-5000t} - 520000e^{-20000t}) \\ &= 0.014e^{-5000t} - 0.104e^{-20000t} \text{ A}, t \geq 0^+ \end{aligned}$$

Et dans l'inductance, puisque $i_L(t) = -i_R(t) - i_C(t)$,

$$i_L(t) = 0.056e^{-5000t} - 0.026e^{-20000t} \text{ A}, t \geq 0$$

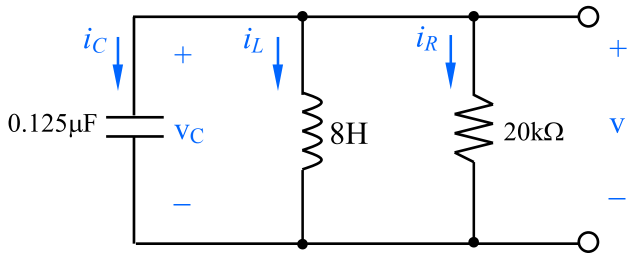
On aurait aussi pu utiliser l'intégrale pour calculer i_L, mais c'est plus long.

On peut vérifier les solutions, pour obtenir les même réponses qu'à la question 1.

$$i_R(0) = -0.07 + 0.13 = 0.06 \text{ A} = 60 \text{ mA} \checkmark$$
$$i_C(0^+) = 0.014 - 0.104 = -0.09 \text{ A} = -90 \text{ mA} \checkmark$$
$$i_L(0) = 0.056 - 0.026 = 0.03 \text{ A} = 30 \text{ mA} \checkmark$$

Exemple 2

Pour le circuit de la figure suivante, où l'on a les conditions initiales $v_C(0^+) = 0$V et $i_L(0^+) = -12.25$mA,



1. Calculer les racines de l'équation caractéristique.
2. Calculer la valeur initiale de v et $\frac{dv}{dt}$.
3. Donner l'expression de $v(t)$.

---

1. On calcule les coefficients :

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(20\times 10^3)(0.125\times 10^{-6})} = 200 \text{ rad/s}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(8)(0.125\times 10^{-6})}} = 1000 \text{ rad/s}$$

On est donc dans la situation où $\omega_0^2 > \alpha^2$. Les deux racines sont :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -200 + j979.8 \text{ rad/s} \tag{6.21}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -200 - j979.8 \text{ rad/s} \tag{6.22}$$

Si les racines sont complexes, elles seront toujours conjuguées ($s_2 = s_1^*$).

2. La valeur initiale de v est $v(0^+) = v(0) = 0$V. Pour calculer la valeur initiale de $\frac{dv}{dt}$, on a :

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C}$$

donc il faut calculer $i_C(0^+)$.

Le courant initial dans la résistance est :

$$i_R = \frac{v(0)}{R} = 0$$

Donc le courant dans la capacitance est :

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0) = -12.25 \text{ mA}$$

et alors,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{-12.25}{0.125\times 10^{-6}} = 98 \text{ kV/s}$$

3. Puisque $\omega_0^2 > \alpha^2$, la solution est :

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t) + B_2 e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t)$$

où

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{1000^2 - 200^2} = 979.8 \text{ rad/s}$$

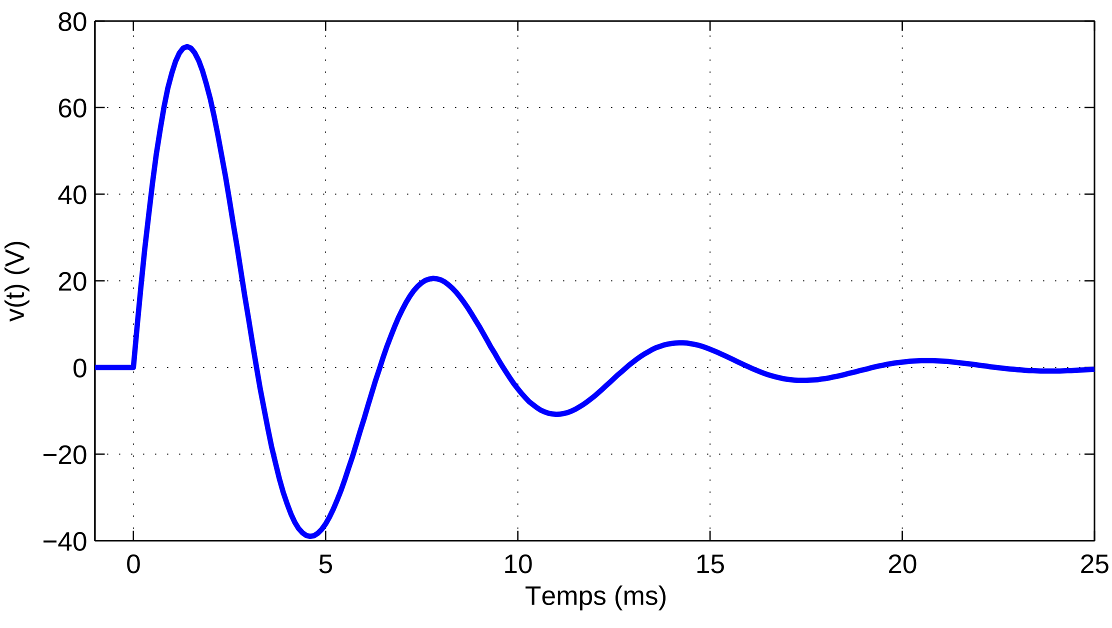
On trouve B_1 et B_2 selon :

$$\begin{aligned} B_1 &= v(0^+) = 0 \\ \frac{i_C(0^+)}{C} &= -\alpha B_1 + \omega_d B_2 \\ \Rightarrow 98000 &= 979.8 B_2 \Rightarrow B_2 \cong 100 \text{ V} \end{aligned}$$

La tension est :

$$v(t) = 100 e^{-200t} \sin(979.8t) \text{ V}, \qquad t \geq 0$$

Le graphe de la tension est :



Remarquer que la tension oscille, devenant même négative, tout en s'affaiblissant, à cause de l'exponentiel.

6.2 Réponse échelon d'un circuit RLC parallèle

Le circuit RLC parallèle est donné à la figure 6.2. Lorsque l'interrupteur est ouvert, la source I_S est subitement appliquée au circuit.

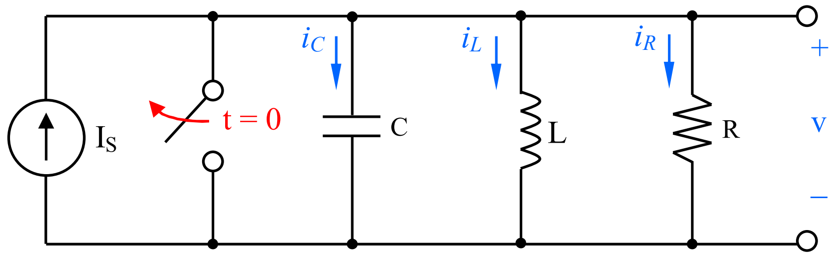


Figure 6.2 – Circuit RLC parallèle, avec source échelon

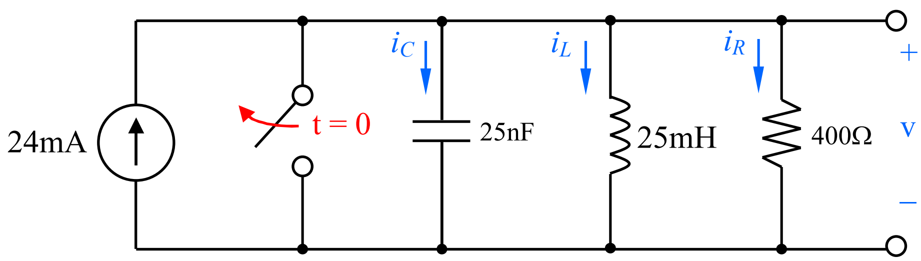
Dans ce cas, la solution de la tension est du même type que celle présentée avant, sauf qu'il y a un nouveau terme :

$$x(t) = x_f + x_n(t) \tag{6.23}$$

où x_f est la valeur finale de v ou i, et $x_n(t)$ est la réponse naturelle de $x(t)$ (solutions obtenue à la section précédente).

Exemple 3

Pour le circuit de la figure suivante, l'énergie initiale est nulle.



1. Calculer la valeur initiale du courant dans l'inductance, $i_L(0)$.
2. Calculer la valeur initiale de $\frac{di_L(0)}{dt}$.
3. Calculer les racines de l'équation caractéristique.
4. Donner l'expression du courant $i_L(t)$, pour $t \geq 0$.

---

1. Puisque l'énergie initiale du circuit est nulle, le courant initial dans l'inductance est nul aussi.

$$i_L(0) = 0$$

2. Puisque l'énergie initiale est nulle, la tension aux bornes de l'inductance sera nulle aussi : $v_L(0^+) = 0$. On a la relation :

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \frac{di(0)}{dt} = \frac{v_L(0)}{L} = 0$$

3. On calcule les coefficients,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(400)(25\times 10^{-9})} = 50000 \text{ rad/s}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.025)(25\times 10^{-9})}} = 40000 \text{ rad/s}$$

On est donc dans la situation où $\omega_0^2 < \alpha^2$. Les deux racines sont :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -20000 \text{ rad/s}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -80000 \text{ rad/s}$$

4. La solution est de la forme :

$$i(t) = I_f + i_n(t)$$

où

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

On calcule A_1 et A_2 selon

$$i_L(0) = I_f + A_1 + A_2 = 0$$
$$\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = -20000A_1 - 80000A_2 = 0$$

La valeur finale du courant est $I_f = i_L(\infty) = 24$mA, puisque l'inductance se comporte comme un court-circuit. Tout le courant de la source passera dans l'inductance. Les équations sont alors :

$$0 = 0.024 + A_1 + A_2$$
$$0 = -20000A_1 - 80000A_2$$

qu'on solutionne pour obtenir $A_1 = -32$mA, et $A_2 = 8$mA.

L'expression du courant est :

$$i_L(t) = 24 - 32e^{-20000t} + 8e^{-80000t} \text{ mA}, \qquad t \geq 0$$

6.3 Réponse naturelle et échelon d'un circuit RLC série

Les étapes de calcul des circuits RLC série sont les même que celle des circuits RLC parallèle. La seule différence, c'est qu'on solutionne pour le courant au lieu de la tension. La figure 6.3 montre le circuit RLC série. Noter que l'inductance possède un courant initial I_0 et que la capacitance a une tension initiale V_0.

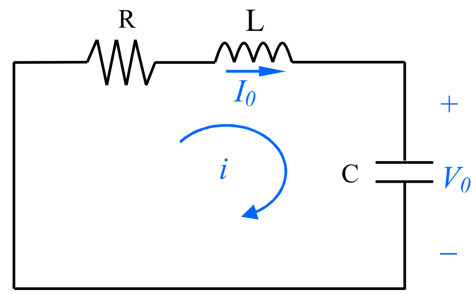


FIGURE 6.3 – Circuit RLC série, avec conditions initiales

On applique la loi des tensions de Kirchhoff à la boucle :

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + V_0 = 0 \tag{6.24}$$

On dérive pour enlever l'intégrale,

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0 \tag{6.25}$$

qu'on peut réarranger :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \tag{6.26}$$

L'équation caractéristique est :

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{6.27}$$

dont les racines sont :

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{6.28}$$

ou,

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{6.29}$$

où

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{6.30}$$

La solution à l'équation différentielle prend la même forme que celle des circuits RLC parallèle, sauf qu'on solutionne pour le courant au lieu de la tension. Selon les valeurs de α et ω_0, on a trois solutions possibles.

$$① \; \alpha^2 > \omega_0^2 \longrightarrow i(t) = I_f + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{6.31}$$

$$② \; \omega_0^2 > \alpha^2 \longrightarrow i(t) = I_f + B_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + B_2 e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t) \tag{6.32}$$

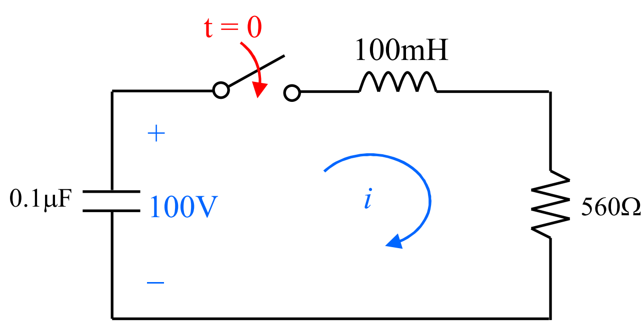
$$③ \; \omega_0^2 = \alpha^2 \longrightarrow i(t) = I_f + D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t} \tag{6.33}$$

Pour trouver les différentes constantes, on utilise $i(0^+)$ et $\frac{di(0^+)}{dt}$ (au lieu de $v(0^+)$ et $\frac{dv(0^+)}{dt}$).

La réponse échelon donne la même chose que pour les circuits RLC parallèle : il faut ajouter le terme i_f (ou v_f) à la solution des équations.

EXEMPLE 4

Pour le circuit de la figure suivante, le condensateur possède une charge initiale de 100V.



1. Calculer $i(t)$ pour $t \geq 0$.
2. Calculer $v_C(t)$ pour $t \geq 0$.

---

1. La première étape est de faire l'analyse du circuit pour $t = 0^-$.

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 100 \text{ V}$$
$$i(0^-) = i(0^+) = 0$$

Les coefficients de ce circuit sont :

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{560}{2(0.1)} = 2800 \text{ rad/s}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.1)(1\times 10^{-7})}} = 10000 \text{ rad/s}$$

On est donc dans la situation où $\omega_0^2 > \alpha^2$, ce qui veut dire que la solution est :

$$i(t) = i_f + B_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + B_2 e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)$$

où

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10000^2 - 2800^2} = 9600 \text{ rad/s}$$

Le courant final $i_f = 0$, puisque le condensateur se comportera comme un circuit ouvert. On calcule les autres constantes :

$$i(0^+) = B_1 + i_f = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$
$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$$
$$\Rightarrow \frac{100}{0.1} = 9600 B_2 \Rightarrow B_2 = 0.1042 \text{ A}$$

La tension initiale aux bornes de l'inductance est la même que celle aux bornes de la capacitance, parce que le courant initial est nul : il n'y a pas de chute de tension aux bornes de la résistance, donc $v_L(0^+) = v_C(0^+)$.

L'expression du courant est :

$$i(t) = 0.1042 e^{-2800t}\sin(9600t) \text{ A}, \qquad t \geq 0$$

2. On a deux options pour calculer la tension aux bornes du condensateur :

$$① \; v_c = -\frac{1}{C}\int_0^t i\, d\tau + 100$$
$$② \; v_c = Ri + L\frac{di}{dt}$$

En général, il est plus facile de dériver que d'intégrer.

$$\frac{di}{dt} = 0.1042\left(-2800 e^{-2800t}\sin(9600t) + 9600 e^{-2800t}\cos(9600t)\right)$$
$$= -291.67 e^{-2800t}\sin(9600t) + 1000 e^{-2800t}\cos(9600t)$$

et donc,

$$L\frac{di}{dt} = -29.17 e^{-2800t}\sin(9600t) + 100 e^{-2800t}\cos(9600t)$$

La chute de tension aux bornes de la résistance est :

$$Ri = 58.33e^{-2800t}\sin(9600t)$$

ce qui donne une tension aux bornes du condensateur de :

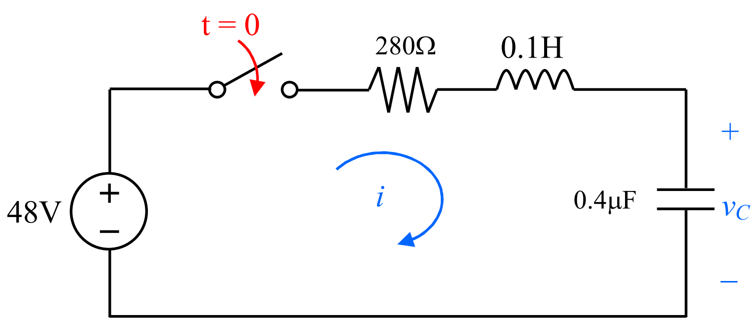
$$v_C(t) = 29.17e^{-2800t}\sin(9600t) + 100e^{-2800t}\cos(9600t)\text{ V}, \qquad t \geq 0$$

On peut vérifier :

$$v_C(0^+) = 100 \checkmark$$

EXEMPLE 5

Pour le circuit de la figure suivante, l'énergie initiale du circuit est nulle.



1. Calculer $v_C(t)$ pour $t \geq 0$.

La première étape est de faire l'analyse du circuit pour $t = 0^-$. Puisqu'il n'y a pas d'énergie initiale,

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 0$$
$$i(0^-) = i(0^+) = 0$$

Les coefficients de ce circuit sont :

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{280}{2(0.1)} = 1400\text{ rad/s}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.1)(4\times 10^{-7})}} = 5000\text{ rad/s}$$

On est donc dans la situation où $\omega_0^2 > \alpha^2$, ce qui veut dire que la solution est :

$$v_C(t) = v_f + B_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + B_2 e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)$$

où

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{5000^2 - 1400^2} = 4800 \text{ rad/s}$$

La tension finale aux bornes du condensateur est la tension de la source ($v_f = 48$V). Pour $t \to \infty$, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert. Il n'y aura donc pas de courant qui circule dans la boucle, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de chute de tension aux bornes de la résistance et de l'inductance.

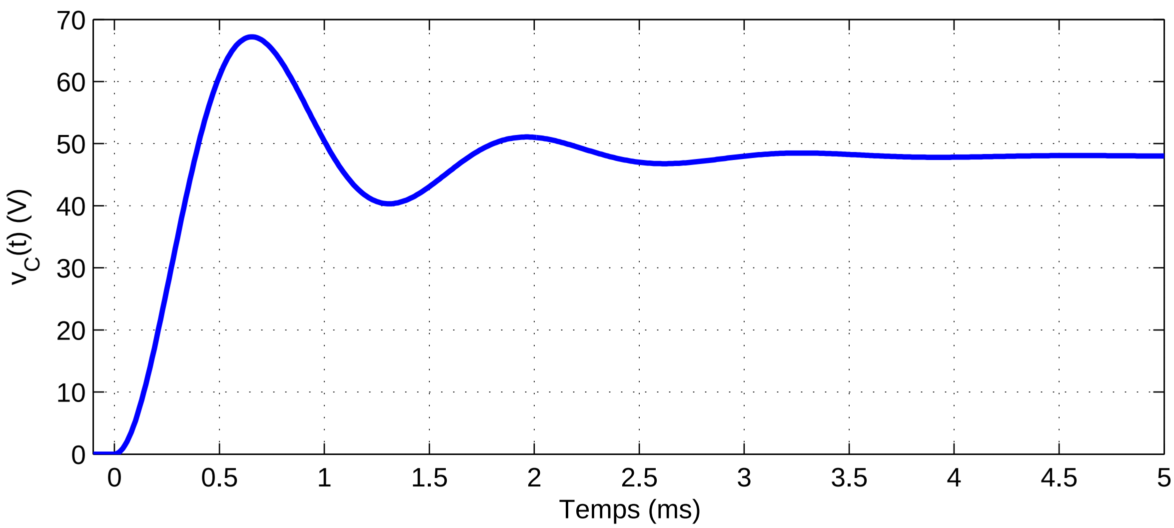
On cherche maintenant B_1 et B_2 avec $v_C(0^+)$ et $\frac{dv(0^+)}{dt}$.

$$v(0^+) = B_1 + v_f = 0 \Rightarrow B_1 = -48 \text{ V}$$
$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$$
$$\Rightarrow 0 = -1400 B_1 + 4800 B_2 \Rightarrow B_2 = -14 \text{ V}$$

ce qui donne :

$$v_C(t) = 48 - 48e^{-1400t}\cos(4800t) - 14e^{-1400t}\sin(4800t) \text{ V}, \qquad t \geq 0$$

Le graphe de $v_C(t)$ est :



On voit bien que la tension se stabilise à 48V pour $t \gg 0$.